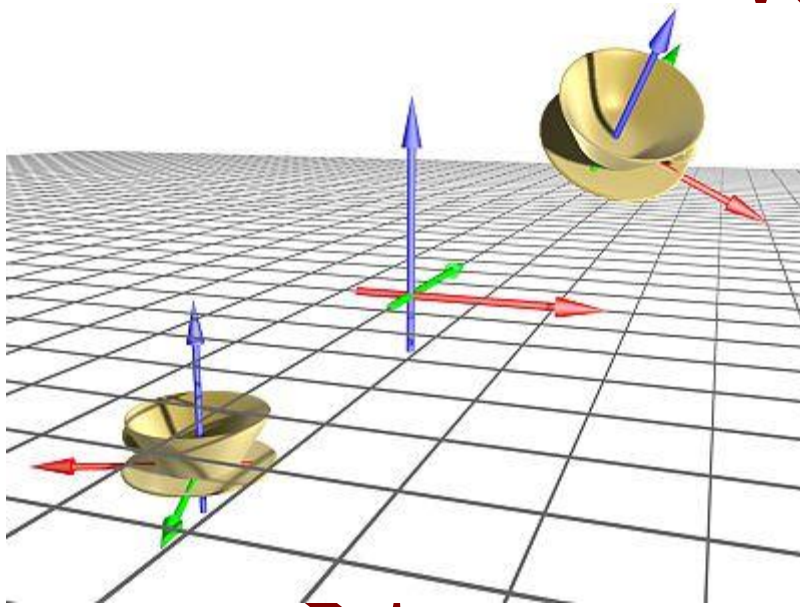


# ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Τμήμα Φαρμακευτικής

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

*Λυμένες Ασκήσεις  
&  
Λυμένα Θέματα Εξετάσεων*

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014**



## ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

**ΘΕΜΑ 1**

Δίνεται ο πίνακας:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Να υπολογίσετε τον πίνακα  $AA^T$ .2) Από το αποτέλεσμα του ερωτήματος (1) τί συμπεράσματα βγάξετε για την αντιστρεψιμότητα του πίνακα  $A$ ; Από τα συμπεράσματα αυτά μπορείτε να συνάγετε τον πίνακα  $A^{-1}$ .**ΛΥΣΗ:**1) Ο **ανόστροφος** ( $A^T$ ) ενός πίνακα  $A$  προκύπτει εάν διατάξουμε τις γραμμές του  $A$  ως στήλες με την ίδια σειρά (οπότε αυτόματα οι στήλες γίνονται γραμμές).

Επομένως έχουμε ότι:



$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα είναι:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{4} + \frac{2}{4} & \frac{2}{4} - \frac{2}{4} & 0 \\ \frac{2}{4} - \frac{2}{4} & \frac{2}{4} + \frac{2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

2) Επομένως έχουμε ότι:

$$A \cdot A^T = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Γενικά ισχύει ότι: } A \cdot A^{-1} = I)$$



## ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

**ΘΕΜΑ 2**Δίνεται το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$ :

$$\Sigma: \begin{cases} \alpha x + y + (\alpha - 1)z = \alpha + 1 \\ x + \alpha y + z = 2 \\ x + y + z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

- 1) Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  το  $\Sigma$  είναι σύστημα Cramer. Στην περίπτωση αυτή να βρείτε πόσες και ποιες είναι οι λύσεις του συστήματος.
- 2) Για τις υπόλοιπες τιμές του  $\alpha$  το  $\Sigma$  έχει λύσεις; Αν ναι, να τις βρείτε.

**ΛΥΣΗ:**

1) Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (\alpha - 1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\alpha(\alpha - 1) - (1 - 1) + (\alpha - 1)(1 - \alpha) = \alpha^2 - \alpha + \alpha - \alpha^2 - 1 + \alpha = \alpha - 1$$

Επομένως για:  $D \neq 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$ , το  $\Sigma$  έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

Έχουμε ότι:

$$\rightarrow D_x = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & \alpha-1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+1) \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + (\alpha-1) \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha+1)(\alpha-1) - (2-\alpha) + (\alpha-1)(2-\alpha^2) = \alpha^2 - 1 - 2 + \alpha + 2\alpha - \alpha^2 - 2 + \alpha^3 =$$

$$-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 5$$

$$\rightarrow D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha+1 & \alpha-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} - (\alpha+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (\alpha-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$\alpha(2-\alpha) - (\alpha+1)(1-1) + (\alpha-1)(\alpha-2) = 2\alpha - \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha - \alpha + 2 =$$

$$2 - \alpha$$

$$\rightarrow D_z = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + (\alpha+1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\alpha(\alpha^2 - 2) - (\alpha - 2) + (\alpha+1)(1-\alpha) = \alpha^3 - 2\alpha - \alpha + 2 + 1 - \alpha^2 =$$

$$\alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 3 = \alpha^2(\alpha-1) - 3(\alpha-1) = (\alpha-1)(\alpha^2-3)$$

Άρα είναι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 5}{\alpha - 1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2 - \alpha}{\alpha - 1}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 3)}{\alpha - 1} = \alpha^2 - 3$$



2) Στην περίπτωση που είναι:

$$\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

τότε το σύστημα  $\Sigma$  γίνεται:

$$\Sigma: \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο γιατί όπως εύκολα φαίνεται από τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει ότι:  $1=2$ , που είναι άτοπο.

Ιδιαιτερα μαθηματα.gr



## ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

**ΘΕΜΑ 3**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x \ln \frac{1}{x}, D \rightarrow \mathbb{R}$$

- 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- 2) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f$ . Διατυπώστε το κριτήριο της 2<sup>ης</sup> παραγώγου. Να χαρακτηρίσετε τα κρίσιμα σημεία της  $f$  (τοπικό μέγιστο/ελάχιστο).
- 3) Να βρείτε ένα πολυώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού από το οποίο προσεγγίζεται η συνάρτηση  $f$  στα κρίσιμα σημεία της.

**ΛΥΣΗ:**

- 1) Πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Επομένως υπό τη μορφή διαστήματος είναι:

$$x \in (0, +\infty)$$



2) Αρχικά υπολογίζουμε την 1<sup>η</sup> παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x) = \left( x \ln \frac{1}{x} \right)' = (x)' \ln \frac{1}{x} + x \left( \ln \frac{1}{x} \right)' = \ln \frac{1}{x} + x \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} \right)' =$$

$$\ln \frac{1}{x} - x^2 \frac{1}{x^2} = \ln \frac{1}{x} - 1$$

Κατόπιν βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = e \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

→ Κριτήριο 2<sup>ης</sup> Παραγώγου (για τοπικά ακρότατα)

Ας είναι  $y=f(x)$  μία συνάρτηση ορισμένη στο  $[a, b]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  και  $x_0$  ένα κρίσιμο σημείο της  $f$ , στο οποίο υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της  $f$  και είναι διάφορη του μηδενός. Τότε :

- ✓ αν  $f''(x_0) > 0$ , τότε η  $f$  έχει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$ .
- ✓ αν  $f''(x_0) < 0$ , τότε η  $f$  έχει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$ .

Επομένως έχουμε:

$$f''(x) = \left( \ln \frac{1}{x} - 1 \right)' = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} \right)' = x \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x}$$

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e < 0$$

Συμπέρασμα:

Η  $f$  έχει τοπικό μέγιστο στο  $x_0 = \frac{1}{e}$  το  $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} \ln e = \frac{1}{e}$





## 3) Προσέγγιση συναρτήσεων με πολυώνυμο Taylor

Γενικά:Προσέγγιση με πολυώνυμο Taylor βαθμού  $n$  γύρω από το σημείο  $x_0 = a$ :

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Υπολογίζουμε το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 γύρω από το  $x_0 = \frac{1}{e}$  για την

$$f(x) = x \ln \frac{1}{x}:$$

$$f(x) \approx f\left(\frac{1}{e}\right) + f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + \frac{f''\left(\frac{1}{e}\right)}{2}\left(x - \frac{1}{e}\right)^2 \quad (1)$$

$$\rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} \ln e = \frac{1}{e}$$

$$\rightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$$

$$\rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e$$

Επομένως έχουμε:

$$(1) \Rightarrow f(x) \approx \frac{1}{e} - \frac{e}{2}\left(x - \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{e} - \frac{e}{2}\left(x^2 - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e^2}\right) =$$

$$-\frac{e}{2}x^2 + x - \frac{1}{2e} + \frac{1}{e} = -\frac{e}{2}x^2 + x - \frac{1}{2e} + \frac{2}{2e} = -\frac{e}{2}x^2 + x + \frac{1}{2e}$$



## ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

**ΘΕΜΑ 4**

Να λύσετε την διαφορική εξίσωση:

$$xy' + (x-1)y = x^2 \cos x$$

**ΛΥΣΗ:**1) Αρχικά θα βρούμε τη λύση της ομογενούς διαφορικής:  $xy' + (x-1)y = 0$ 

Έχουμε ότι:

$$xy' + (x-1)y = 0 \Leftrightarrow x \frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0 \Leftrightarrow x \frac{dy}{dx} = -(x-1)y \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-(x-1)}{x} dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-x+1}{x} dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left(-1 + \frac{1}{x}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(-1 + \frac{1}{x}\right) dx \Leftrightarrow \ln|y| = -x + \ln|x| + c \Leftrightarrow \ln|y| - \ln|x| = -x + c \Leftrightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = -x + c \Leftrightarrow e^{\ln\left|\frac{y}{x}\right|} = e^{-x+c} \Leftrightarrow \left|\frac{y}{x}\right| = e^{-x} \cdot e^c \Leftrightarrow \left|\frac{y}{x}\right| = c_1 e^{-x} \Leftrightarrow y = c_1 x e^{-x} \quad (c_1 = e^c > 0)$$

Επομένως η λύση της ομογενούς είναι:  $y_o = c_1 x e^{-x}$ 

Παρατηρώντας προσεκτικά την εξίσωση της δοθείσας διαφορικής θεωρούμε κατάλληλη μερική λύση:

$$y_{\mu} = x(A \cos x + B \sin x)$$

Η μερική λύση πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση της διαφορικής, δηλαδή:

$$xy'_{\mu} + (x-1)y_{\mu} = x^2 \cos x \quad (1)$$

Έχουμε ότι:

$$\rightarrow y'_{\mu} = (x(A \cos x + B \sin x))' = (x)'(A \cos x + B \sin x) + x(A \cos x + B \sin x)' =$$

$$A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x) = A \cos x + B \sin x - Ax \sin x + Bx \cos x$$

Άρα με αντικατάσταση έχουμε: (1)  $\Rightarrow$

$$x(A \cos x + B \sin x - Ax \sin x + Bx \cos x) + (x-1)(Ax \cos x + Bx \sin x) = x^2 \cos x \Leftrightarrow$$

$$Ax \cos x + Bx \sin x - Ax^2 \sin x + Bx^2 \cos x + Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x - Ax \cos x - Bx \sin x = x^2 \cos x \Leftrightarrow$$

$$-Ax^2 \sin x + Bx^2 \cos x + Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x = x^2 \cos x \Leftrightarrow$$

$$(A+B)x^2 \cos x + (B-A)x^2 \sin x = x^2 \cos x$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι:  $A+B=1$  και  $B-A=0$

Επομένως είναι:  $A=B=\frac{1}{2}$ , που σημαίνει ότι  $y_{\mu} = \frac{1}{2}x \cos x + \frac{1}{2}x \sin x$

Η λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y = y_o + y_{\mu} = e^{-x} + \frac{1}{2}x \cos x + \frac{1}{2}x \sin x$$



## ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

**ΘΕΜΑ 6**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x, y) = x^2 y + \ln(xy)$$

- 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- 2) Να βρείτε τις μερικές παραγώγους 1<sup>ης</sup> τάξης της παραπάνω συνάρτησης.

**ΛΥΣΗ:**

1) Πρέπει να ισχύει ότι:

$$xy > 0$$

Επομένως είναι:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$$

2) Οι μερικές παραγώγοι 1<sup>ης</sup> τάξης της συνάρτησης είναι:

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y + \ln(xy)) = 2yx + \frac{1}{xy} y = 2yx + \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y + \ln(xy)) = x^2 + \frac{1}{xy} x = x^2 + \frac{1}{y}$$



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΠΙΝΑΚΕΣ

**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Έστω ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$$

- 1) Να αποδείξετε ότι  $AA^T = A^T A = I$ .
- 2) Να βρείτε τις τιμές του  $\theta \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει:

$$A + A^T = I$$

**ΛΥΣΗ:**

- 1) Ο **ανάστροφος** ( $A^T$ ) ενός πίνακα  $A$  προκύπτει εάν διατάξουμε τις γραμμές του  $A$  ως στήλες με την ίδια σειρά (οπότε αυτόματα οι στήλες γίνονται γραμμές).

Επομένως είναι

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



Έχουμε ότι:

$$AA^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

2) Έχουμε ότι:

$$A + A^T = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta + \cos \theta & \sin \theta - \sin \theta \\ \sin \theta - \sin \theta & \cos \theta + \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 2 \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$2 \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \theta = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΠΙΝΑΚΕΣ

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Να αποδείξετε ότι  $AB = I$ .2) Να αποδείξετε ότι  $A^2 - A^{-1} = 3(A - I)$ .**ΛΥΣΗ:**

1) Έχουμε ότι:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - \alpha & \alpha^2 - \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha - \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:



$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Έχουμε ότι:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha - \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & -\alpha - \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως είναι:

$$\rightarrow A^2 - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -2\alpha - \alpha & \alpha^2 - \alpha^2 \\ 0 & 1-1 & -2\alpha - \alpha \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\rightarrow 3(A - I) = 3A - 3I = 3 \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3\alpha & 0 \\ 0 & 3 & -3\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3 & -3\alpha & 0 \\ 0 & 3-3 & -3\alpha \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από τα παραπάνω είναι εμφανές ότι ισχύει η δοθείσα ισότητα.





## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

**ΑΣΚΗΣΗ 3**

Να γίνει η διερεύνηση του παρακάτω συστήματος και να βρεθούν αν υπάρχουν οι λύσεις του.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4x + y + z = -1 \\ -3x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

**ΛΥΣΗ:**

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (-1 - 2) - 2 \cdot (-4 + 3) - 1 \cdot (8 + 3) = -3 - 2 \cdot (-1) - 11 = -3 + 2 - 11 = -12$$

Επομένως είναι  $D \neq 0$ , που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.



Έχουμε ότι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-2 \cdot (1-2) - 1 \cdot (-2-2) = -2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-4) = 2 + 4 = 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (1-2) - 1 \cdot (8-3) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = -1 - 5 = -6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (2+2) - 2 \cdot (8-3) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 4 - 10 = -6$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

Άρα είναι:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Να εξετάσετε αν το παρακάτω σύστημα έχει μοναδική λύση και αν έχει να λυθεί.

$$2x + 3y + 4z = 3$$

$$4x - 3y - 4z = 0$$

$$2x + 6y - 8z = 1$$

**ΛΥΣΗ:**

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα  $3 \times 3$ .

Έχουμε ότι:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$2(24 + 24) - 4(-32 + 8) + 4(24 + 6) = 2 \cdot 48 - 4 \cdot (-24) + 4 \cdot 30 =$$

$$96 + 96 + 120 = 288$$

Επομένως είναι  $D \neq 0$ , που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.



Έχουμε ότι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 1 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$3(24 + 24) - 3(0 + 4) + 4(0 + 3) = 3 \cdot 48 - 12 + 12 = 144$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2(0 + 4) - 3(-32 + 8) + 4(4 - 0) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-24) + 16 = 8 + 72 + 16 = 96$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$2(-3 - 0) - 3(4 - 0) + 3(24 + 6) = -6 - 12 + 90 = -18 + 90 = 72$$

Επομένως έχουμε:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{144}{288} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{96}{288} = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{72}{288} = \frac{1}{4}$$

Άρα είναι:

$$(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right)$$



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**ΑΣΚΗΣΗ 5**

Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y' = -y^2$$

**ΛΥΣΗ:**

Έχουμε ότι:

$$y' = -y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{-y^2} = dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{-y^2} = \int dx \Leftrightarrow -\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Leftrightarrow \frac{1}{y} = x + c \Leftrightarrow y = \frac{1}{x + c}$$

→ Παρατήρηση: Είναι εμφανές ότι και η συνάρτηση  $y=0$  ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση χωρίς να προέρχεται από την γενική λύση  $y = \frac{1}{x+c}$  για κάποια πεπερασμένη τιμή της  $c$ . Η λύση  $y=0$  αποτελεί την περιβάλλουσα των λύσεων  $y = \frac{1}{x+c}$  της διαφορικής εξίσωσης. Τέτοιες λύσεις ονομάζονται ιδιάζουσες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**ΑΣΚΗΣΗ 6**

Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' \sin x = y(y-1), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

**ΛΥΣΗ:**

Έχουμε ότι:

$$y' \sin x = y(y-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \sin x = y(y-1) \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{\sin x} \Leftrightarrow \int \left( \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = \int \frac{dx}{\sin x} \quad (1) \quad (\text{Ισχύει ότι: } \frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y})$$

Το δεξί μέλος της (1) υπολογίζεται ως εξής:

$$\rightarrow I = \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\text{Θέτουμε } t = \tan \frac{x}{2}$$

$$\text{Επιπλέον ισχύουν: } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{και} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$



Επομένως έχουμε ότι:

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

Άρα τελικά έχουμε: (1)  $\Rightarrow$

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c \Leftrightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c \Leftrightarrow (y \in (1, +\infty) \wedge x \in (0, \pi))$$

$$\ln \frac{y-1}{y} = \ln \left( \tan \frac{x}{2} \right) + c \Leftrightarrow \ln \frac{y-1}{y} = \ln \left( \tan \frac{x}{2} \right) + \ln C, C > 0$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι  $\frac{y-1}{y} = C \tan \frac{x}{2}, C > 0$

Κατόπιν προσδιορίζουμε το  $C$  από την δοθείσα αρχική συνθήκη:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{2-1}{2} = C \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow C \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C \cdot 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

Επομένως η ζητούμενη λύση είναι:

$$\frac{y-1}{y} = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y(x) = -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} - 2}$$

$\rightarrow$  Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις  $y=1$  και  $y=0$  είναι ιδιαίζουσες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, αφού  $y(y-1)=0$ .



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΑΝΑΛΥΣΗ

**ΑΣΚΗΣΗ 7**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

- 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- 2) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f$ . Διατυπώστε το κριτήριο της 2<sup>ης</sup> παραγώγου. Να χαρακτηρίσετε τα κρίσιμα σημεία της  $f$  (τοπικό μέγιστο/ελάχιστο).

**ΛΥΣΗ:**

- 1) Πρέπει να ισχύει ότι:  $x > 0$

Επομένως υπό τη μορφή διαστήματος είναι:  $x \in (0, +\infty)$ 

- 2) Αρχικά υπολογίζουμε την 1<sup>η</sup> παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x) = \left( \frac{\ln x}{x^2} \right)' = \frac{(\ln x)' x^2 - \ln x (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$





Κατόπιν βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

→ Κριτήριο 2<sup>ης</sup> Παραγώγου (για τοπικά ακρότατα)

Ας είναι  $y=f(x)$  μία συνάρτηση ορισμένη στο  $[a, b]$ , παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  και  $x_0$  ένα κρίσιμο σημείο της  $f$ , στο οποίο υπάρχει η δεύτερη παραγώγος της  $f$  και είναι διάφορη του μηδενός. Τότε :

- ✓ αν  $f''(x_0) > 0$ , τότε η  $f$  έχει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$ .
- ✓ αν  $f''(x_0) < 0$ , τότε η  $f$  έχει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$ .

Επομένως έχουμε:

$$f''(x) = \left( \frac{1-2\ln x}{x^3} \right)' = \frac{(1-2\ln x)' x^3 - (1-2\ln x)(x^3)'}{x^6} =$$

$$\frac{-\frac{2}{x} x^3 - 3x^2(1-2\ln x)}{x^6} = \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6} = \frac{-5x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6} = \frac{-5 + 6\ln x}{x^4}$$

$$f''(\sqrt{e}) = \frac{-5 + 6\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^4} = \frac{-5 + 6\ln e^{\frac{1}{2}}}{e^2} = \frac{-5 + 3}{e^2} = -\frac{2}{e^2} < 0$$

Συμπέρασμα:

Η  $f$  έχει τοπικό μέγιστο στο  $x_0 = \sqrt{e}$  το  $f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΑΝΑΛΥΣΗ

**ΑΣΚΗΣΗ 8**

Να βρεθούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$ , να δέχεται τοπικό ακρότατο στα σημεία  $x_0=1$  και  $x_0=-2$ . Να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων.

**ΛΥΣΗ:**

Αρχικά υπολογίζουμε την 1<sup>η</sup> παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1)' = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 6$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta - 6 = 0 \\ 12\alpha - 4\beta - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Υπολογίζουμε την 2<sup>η</sup> παράγωγο της συνάρτησης:

$$f''(x) = (3\alpha x^2 + 2\beta x - 6)' = 6\alpha x + 2\beta$$

$$f''(1) = 9 > 0 \text{ (Τ.Ε. στο } x_0=1) \text{ και } f''(-2) = -9 < 0 \text{ (Τ.Μ. στο } x_0=-2)$$



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

**ΑΣΚΗΣΗ 9**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x, y) = e^x \sin(xy)$$

Να βρείτε τις μερικές παραγώγους 1<sup>ης</sup> τάξης της παραπάνω συνάρτησης.**ΛΥΣΗ:**Οι μερικές παραγώγοι 1<sup>ης</sup> τάξης της συνάρτησης είναι:

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \sin(xy)) = e^x \sin(xy) + e^x \frac{\partial}{\partial x} (\sin(xy)) = e^x \sin(xy) + ye^x \cos(xy)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin(xy)) = e^x \frac{\partial}{\partial y} (\sin(xy)) = xe^x \cos(xy)$$



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

**ΑΣΚΗΣΗ 10**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$A. f(x, y) = x^2 e^{y+x^3}, \quad B. g(x, y) = \frac{1}{y+x^3}$$

Να βρείτε τις μερικές παραγώγους 1<sup>ης</sup> τάξης των παραπάνω συναρτήσεων.**ΛΥΣΗ:**Οι μερικές παραγώγοι 1<sup>ης</sup> τάξης των συναρτήσεων είναι:

$$A. \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 e^{y+x^3}) = 2xe^{y+x^3} + x^2 e^{y+x^3} (x^3)' = 2xe^{y+x^3} + 3x^4 e^{y+x^3}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 e^{y+x^3}) = x^2 e^{y+x^3} (y)' = x^2 e^{y+x^3}$$

$$B. \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{y+x^3} \right) = -\frac{1}{(y+x^3)^2} (x^3)' = -\frac{3x^2}{(y+x^3)^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y+x^3} \right) = -\frac{1}{(y+x^3)^2} (y)' = -\frac{1}{(y+x^3)^2}$$



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ TAYLOR

**ΑΣΚΗΣΗ 11**

Να δώσετε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης:

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

**ΛΥΣΗ:**

Έχουμε ότι:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = (e^x)' \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = (e^x)' \Rightarrow f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$$

...

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Άρα το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης είναι:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x-0)^n \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$



## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ TAYLOR

**ΑΣΚΗΣΗ 12**

Να δώσετε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln x, \quad x \in (0, +\infty)$$

**ΛΥΣΗ:**

Για τη συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  η οποία είναι παραγωγίσιμη απεριόριστες φορές στο πεδίο ορισμού της, επιλέγουμε ως κέντρο το  $\alpha = 1$ .

Έχουμε ότι:

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = (\ln x)' \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$$



$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' \Rightarrow f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -6$$

...

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

Προσοχή: Η τελευταία σχέση αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγικό τρόπο.

Άρα το ανάπτυγμα της λογαριθμικής συνάρτησης είναι:

$$\ln x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} (x-1)^n =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n, |x-1| < 1$$

Ιδαιτερα μαθηματα.gr

